Модель (система отсчета связанная с электронной компонентой)

Рассматривается следующая двужидкостная модель. Замагниченные электроны :

Однозарядные ионы, не чувствующие магнитного поля,

Собственное электрическое поле предполагается потенциальным и определяется из уравнения Пуассона

Внешнее магнитное поле постоянно и однородно. Собственным магнитным полем системы пренебрегается, т.е. .

В равновесном состоянии , электроны неподвижны , а ионы на бегают потоком со скоростью ортогональной магнитному полю. Будут интересовать решения в виде малых отклонений от равновесного положения. Поле

Правостороннюю систему координат выберем так, что ось была направлена вдоль магнитного поля, а ось вдоль вектора .

Линеаризованная система

Линеаризуем исходные уравнения относительно указанного равновесного решения. Полагая малым , подставляя в них разложения

и пренебрегая квадратичными членами полу чаем

Далее индексы 1 соответствующие возмущенной части будем опускать. Решение будем искать в виде плоской монохроматической волны с волновым вектором , т.е. направленным вдоль . Для амплитуд и (используются те же обозначения, что и для соответствующих физических величин) имеем

Отсюда получаем выражения для концентраций электронной и ионной компоненты.

Далее, для компонент скорости электроннов перпендикулярно магнитному полю (рассматриваем ) получаем систему

После упрощения она имеет вид

Ее решение есть вектор

где . Наконец, компоненты скоростей ионов равны

Учитывая потенциальность поля где , данные формулы переписываются в виде

Дисперсионное соотношение

Поскольку , то из уравнения Пуассона получаем

или

Если теперь перейти в лабораторную систему, где невозмущенные ионы неподвижны и положить , то получим в точности уравнение из статьи [adam, heron,laval].

Выражения для усредненных потоков

Интересуют потоки электронов и ионов перпендикулярно магнитному полю. Используя, полученные выражения для комплексных амплитуд концентраций и скоростей имеем:

электронная компонента вдоль - оси

|  |
| --- |
|  |
|  |

электронная компонента вдоль - оси

Ионная компонента вдоль - оси

Ионная компонента вдоль - оси

Баланс энергий

Прежде чем проверять баланс энергии заметим, следующее. Поскольку закон сохранения энергии является следствием уравнений движения. Его можно получить домножив уравнение движения каждой компоненты на соответствующую скорость, а затем сложить их воспользовавшись уравнением непрерывности

Член с в правой части преобразуется с помощью уравнения Максвелла

Действительно, домножив его на и воспользовавшись однородностью , мы получим, что

Таким образом, закон сохранения энергии единицы объема имеет вид

После линеаризации и усреднения (c учетом всех сделанных выше предположениях) получим

Энергия невозмущенной системы в единицы объема . Cредние изменение тепловой энергии электронной компоненты равно .Посчитаем осредненную кинетическую энергию возмущенной системы. Для электронной компоненты с точностью до квадратичных членов по амплитуде имеем

Здесь индекс 1 соответствующий неравновесной добавке опущен. Средний квадрат скорости равен

Для ионной компоненты средняя кинетическая энергия c точностью до квадратичного члена по амплитуде равна

где

и

Таким образом, полная кинетическая энергия системы за вычетом равна

|  |
| --- |
|  |
|  |

Или

Преобразуем левую часть последнего равенства с учетом дисперсионного соотношения:

Прибавим к вещественной части дисперсионного соотношение его мнимую часть домноженную на . Получим, что

и, стало быть,

Теперь осталось заметить, что усредненная электростатическая энергия волны равна

Последнее есть закон сохранения энергии: колебания раскачиваются за счет торможения ионного потока. Результат идентичен двупотоковой неустойчивости. Магнитное поле здесь играет роль дополнительной возвращающей силы и никаких новых эффектов не порождает.